УДК 539.3

М. М. ДІХТЯРУК
Хмельницький національний університет

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛЯ ВПЛИВУ ПРУЖНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ І НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ПРУЖНОЇ СМУГИ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ ВІД ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ

В даній статті в рамках лінеаризованої теорії пружності досліджується вплив пружних переміщень і напружень для пружної смуги з початковим (залишковим) напруженням від дії зосередженої сили. Всі дослідження виконані для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій.

In this article within the framework of the linearized theory of resilience there is investigated the influence of resilient shifts and tensions for a resilient bar with initial (residual) tension under the action of the concentrated force. All researches have been executed for compressible and non-compressible bodies in the case of resilient potentials of arbitrary structure in a general view for the theory of large (finite) initial deformations.

Ключові слова: теорія пружності, пружна смуга, теорія великих початкових деформацій.

Вступ. Задачі, що виникають при передачі навантаження від накладки скріпленої з пружною смугою чи пластиною (класична теорія пружності), знову привернули увагу у випадках, коли в останній виникають початкові (залишкові) напруження. Особлива необхідність даного розгляду виникає внаслідок їх важливості при дослідженні конструкцій взагалі і особливо в зв’язку з проектуванням конструкції літальних апаратів. Досить довгий список літератури, що відноситься до згаданих статистичних задач класичної теорії пружності, приводить до класичної роботи Е. Мелана [6], у якій розглядаються дві фундаментальні задачі, які тісно примикають до досліджень даної статті. Аналогічна задача для пружної напівплощини з початковими напруженнями досліджена в роботі А. Гузя [1].

У даній статті в рамках лінеаризованної теорії пружності викладається постановка і розв’язок змішаної задачі про відшукання функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями (товщини t) від дії зосередженого навантаження $P\delta(y_1)$, в напрямку під кутом α до осі Oy_1 (рис. 1), де $\delta(y_1)$ – одинична функція Дірака.

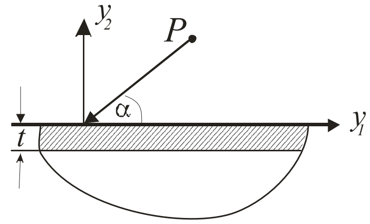

Рис. 1

Всі дослідження виконані для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій. Для переходу до різних варіантів теорії малих початкових деформацій необхідно ввести спрощення, зазначене в [3].

Граничні умови і вихідні співвідношення

Будемо вважати, що початковий стан у пружній смузі з початковими напруженнями ($-\infty < y_1 < \infty; -t \le y_2 \le t$) є однорідним і виконуються умови плоскої деформації [1], тобто $\lambda_3 = 1,\ S_{22}^0 = 0.$ Дотримуючись [3], дослідження проведемо в координатах початкового деформованого стану y_i, що зв’язані з лагранжевими координатами (природного стану) співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2$), де λ_i – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану.

Для визначення поля пружних переміщень і напружень (функції впливу) від прикладеної на її грані зосередженої сили $P\delta(y_1)$, прикладеної під кутом α_0 до осі Oy_1, одержуємо наступні граничні умови на кромці пружної смуги при $y_2 = 0$ (рис. 1)

$$Q_{22}(y_1, 0) = -P\sin\alpha\cdot\delta(y_1),\quad Q_{21}(y_1, 0) = -P\cos\alpha\cdot\delta(y_1) \tag{1}$$

на лінії з’єднання пружної смуги і напівплощини при $y_2 = -t$:

$$u_1(y_1, -t) = 0;\quad u_2(y_1, -t) = 0\,. \tag{2}$$

Дотримуючись [3], вирази для переміщень і напружень граничних точок смуги з початковими напруженнями у випадку рівних і нерівних коренів визначального рівняння запишемо у вигляді:

$$u_1\left(y_1, x_j\right) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[L^+\left(A_1 + A_2\right) + \alpha z_1\left[\left(B_1 + B_2\right)\right]\exp\left(-i\alpha y_1\right)d\alpha\right.,$$

$$u_2\left(y_1, x_j\right) = \frac{m_1}{2\pi\sqrt{n_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[L^+\left(B_1 + s_1 B_2\right) + \alpha z_1\left[\left(A_1 + s_1 A_2\right)\right]\exp\left(-i\alpha y_1\right)d\alpha\right., \tag{3}$$

$$\tilde{Q}_{22}\left(y_1, x_j\right) = \frac{c_{44}\left(1+m_1\right)l_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[L^+\left(A_1 + sA_2\right) + \alpha z_1\left[\left(B_1 + sB_2\right)\right]\exp\left(-i\alpha y_1\right)d\alpha\right.,$$

$$\tilde{Q}_{21}\left(y_1, x_j\right) = \frac{i}{2\pi}\cdot\frac{c_{44}\left(1+m_1\right)}{\sqrt{n_1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[L^+\left(B_1 + s_0 B_2\right) + \alpha z_1\left[\left(A_1 + s_0 A_2\right)\right]\exp\left(-i\alpha y_1\right)d\alpha\right..$$

Тут

$$z_i = \left(n_i\right)^{-\frac{1}{2}} y_2;\;\; s_0 = \frac{1+m_1}{1+m_2};\;\; s = s_0\frac{l_2}{l_1};\;\; s_1 = \frac{m_2 - 1}{m_1};$$

$$L^+\left(A + Bz\right) = \begin{cases}\left(A + Bz\right)\operatorname{ch}\alpha z_1 + B\left(\alpha z_1\right)\operatorname{sh}\alpha z_1; & n_1 = n_2;\\ A\operatorname{ch}\alpha z_1 + Bz\operatorname{ch}\left(\alpha z_2\right); & n_1 \neq n_2;\end{cases}$$

$$L^-\left(A + Bz\right) = \begin{cases}\left(A + Bz\right)\left(\alpha z_1\right)^{-1}\operatorname{sh}\alpha z_1 + B\operatorname{ch}\alpha z_1; & n_1 = n_2;\\ A\operatorname{sh}\alpha z_1 + B\left(\alpha z_1\right)^{-1}\operatorname{sh}\alpha z_2; & n_1 \neq n_2.\end{cases}$$

Тут l_i, m_i, c_{44} – параметри, що визначають початковий стан смуги, n_i – корені визначального рівняння [3], $i = 1, 2$.

Задовольнивши граничні умови (1) – (2) з врахуванням (3) після ряду перетворень для визначення невідомих коефіцієнтів A_i, B_i $\left(i = 1, 2\right)$ у випадку рівних і нерівних коренів визначального рівняння [3] одержимо систему алгебраїчних рівнянь: для рівних коренів $n_1 = n_2$:

$$\begin{gathered} A_1 + A_2 s = n_0;\\ B_1 + B_2 s_0 = m_0;\\ A_1\operatorname{ch}\varphi_1 + A_2\left(\operatorname{ch}\varphi_1 + \varphi_1\operatorname{sh}\varphi_1\right) - B_1\operatorname{sh}\varphi_1 - B_2\left(\operatorname{sh}\varphi_1 + \varphi_1\operatorname{ch}\varphi_1\right) = 0;\\ -A_1\operatorname{sh}\varphi_1 - A_2\left(s_1\operatorname{sh}\varphi_1 + \varphi_1\operatorname{ch}\varphi_1\right) + B_1\operatorname{ch}\varphi_1 + B_2\left(s_1\operatorname{ch}\varphi_1 + \varphi_1\operatorname{sh}\varphi_1\right) = 0; \end{gathered} \tag{4}$$

для нерівних коренів $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{gathered} A_1 + A_2 s = n_0;\\ B_1 + B_2 s_0 = m_0;\\ A_1\operatorname{ch}\varphi_1 + A_2\operatorname{ch}\varphi_1 + B_1\varphi_1\operatorname{sh}\varphi_1 - B_2\operatorname{sh}\varphi_2 = 0;\\ A_1\varphi_1\operatorname{sh}\varphi_1 - A_2 s_1\operatorname{sh}\varphi_1 + B_2\operatorname{ch}\varphi_1 + B_2 s_1\operatorname{ch}\varphi_2 = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Тут введені наступні позначення:

$$n_0 = -\frac{P\sin\alpha_0}{\alpha c_{44}\left(1+m_1\right)l_1};\;\; m_0 = -\frac{i\sqrt{n_1}P\cos\alpha_0}{\alpha c_{44}\left(1+m_1\right)};\;\; \varphi_i = -\frac{\alpha t}{\sqrt{n_i}}\;\;\left(i = 1, 2\right). \tag{6}$$

Розв'язавши системи (4) і (5), знайдемо коефіцієнти $A_i B_i$ $\left(i = 1,2\right)$, що виражаються через параметри, які визначають початковий напружений стан. Вираз для цих коефіцієнтів знаходимо відповідно: для рівних коренів визначального рівняння [1] $n_1 = n_2$ знаходимо коефіцієнти A_i, B_i $\left(i = 1, 2\right)$:

$$A_1 = \left\{-n_0\left[-s_1\left(s_0 + 1\right)\operatorname{sh}^2\varphi_1 - \varphi_1^2 + \left(s_1 - s_0\right)\right] + m_0\left[-s\overline{s}_0\operatorname{sh}\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_1 - sl_1\right]\right\}\xi_1^{-1},$$

$$A_2=\left\{n_0\left[\left(s_1-s_0\right)-\overline{s}_1\operatorname{sh}^2\varphi_1\right]+m_0\left[\varphi_1+\overline{s}_1\operatorname{sh}\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_1\right]\right\}\xi_1^{-1}\,, \tag{7}$$

$$B_1=\left\{-n_0\left[-s_0\overline{s}_1\operatorname{sh}\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_1\right]+m_0\left[s\overline{s}_0\operatorname{sh}^2\varphi_1+\varphi_1^2-s\overline{s}_1\right]\right\}\xi_1^{-1}\,,$$

$$B_2=\left\{n_0\left[-\overline{s}_1\operatorname{sh}^2\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_1+\varphi_1\right]+m_0\left[-\overline{s}_1\operatorname{sh}^2\varphi_1+\overline{s}\right]\right\}\xi_1^{-1}\,; \tag{8}$$

для нерівних коренів визначального рівняння [1] $n_1\neq n_2$ знаходимо $A_i,\,B_i\ \left(i=1,\,2\right)$:

$$A_1=\left\{-n_0\left[s_0\omega_1\left(\alpha\right)-s_1s_0\varphi_1\omega_1\left(\alpha\right)-2s_1\operatorname{sh}^2\varphi^2-s_1\right]-m_0\left[\overline{s}s_1\omega_2\left(\alpha\right)+s\omega_4\left(\alpha\right)\right]\right\}\xi_1^{-1}\left(\alpha\right),$$

$$A_2=\left\{n_0\left[s_0\left(\varphi_1^2-2\right)\operatorname{sh}^2\varphi_1+s_1\omega_1\left(\alpha\right)+\varphi_1\omega_4\left(\alpha\right)-s_0\right]+m_0\left[s_1\varphi_1\omega_2\left(\alpha\right)+\omega_3\left(\alpha\right)\right]\right\}\xi_2^{-1}\left(\alpha\right),$$

$$B_1=\left\{n_0\left[s_0s_1\omega_3\left(\alpha\right)-s_0\varphi_1\omega_2\left(\alpha\right)\right]+m_0\left[ss_1\omega_1\left(\alpha\right)+s\varphi_1\omega_2\left(\alpha\right)-s_1\operatorname{ch}2\varphi_2\right]\right\}\xi_2^{-1}\,,$$

$$B_2=\left\{n_0\left[\varphi_1\omega_2\left(x\right)+s_1\omega_3\left(\alpha\right)\right]+m_0\left[s_1\left(\varphi_1^2-2\right)\operatorname{sh}^2\varphi_1-s_1\varphi_1\omega_4\left(\alpha\right)+\omega_1\left(x\right)-s\right]\right\}\xi_2^{-1}\,. \tag{9}$$

Тут введені наступні позначення:

$$\operatorname{sh}\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_1=\omega_0\left(x\right);\ \operatorname{ch}\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_2=\omega_1\left(x\right);\quad \operatorname{sh}\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_2=\omega_2\left(x\right);$$

$$\operatorname{ch}\varphi_1\operatorname{sh}\varphi_2=\omega_3\left(x\right);\ \ \operatorname{sh}\varphi_1\operatorname{sh}\varphi_2=\omega_4\left(x\right).$$

$$\overline{s}=1-s;\ \overline{s}_1=1-s_1;\ \overline{s}_0=1-s_0.$$

$$\xi_1\left(\alpha\right)=\left(s-s_0\right)\left(s_1-1\right)\operatorname{sh}^2\varphi_1+\varphi_1^2+\left(s_1-s_0\right)\left(s-s_1\right), \tag{10}$$

$$\xi_2\left(\alpha\right)=ss_0\varphi_1^2\operatorname{sh}^2\varphi_1-ss_0\operatorname{ch}^2\varphi_1-\left(s_1s_0-s\right)\varphi_1\omega_4\left(x\right)+\left(ss_1-s_0\right)\operatorname{ch}\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_2-s_1\operatorname{ch}2\varphi_2\,. \tag{11}$$

Підставивши значення (8) і (9) у (3), знайдемо функцію впливу в пружній смузі з початковими напруженнями для рівних і нерівних коренів визначального рівняння у вигляді

$$u_{11}\left(y_1,y_2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{11}\left(\alpha_1y_2\right)e^{-i\alpha y_1}d\alpha\,,\quad u_{12}\left(y_1,y_2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{12}\left(\alpha_1y_2\right)e^{-i\alpha y_1}d\alpha\,. \tag{12}$$

Розглянемо два випадки граничних точок $\left(y_2=0\right)$ пружної смуги з початковими напруженнями.

I. Одинична сила $\delta\left(y_1\right)$ діє нормально до верхньої грані пружної смуги з початковими напруженнями $\left(P=1\right)$.

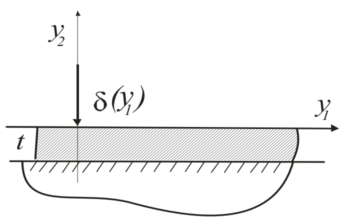

Рис. 2

У цьому випадку (рис. 2) зміщення граничних точок $\left(y_2=0\right)$ пружної смуги з початковими напругами можна обчислити за формулами:

$$u_{11}\left(y_1,0\right)=u_1\left(y_1,0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{11}\left(\alpha\right)\cos\alpha y_1d\alpha\,,\quad u_{12}\left(y_1,0\right)=u_2\left(y_1,0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{12}\left(\alpha\right)\sin\alpha y_1d\alpha\,. \tag{13}$$

Тут при $n_1=n_2$

$$H_{11}\left(\alpha\right)=n_0\left[\left(s_0\operatorname{sh}^2\alpha\varphi_1+s_1s_0\operatorname{sh}^2\alpha\varphi_1-\alpha\varphi_1N+\left(\alpha\varphi_1\right)^2-\overline{s}_1N+\varphi_1\right]\xi_1^{-1}\left(\alpha\right), \tag{14}$$

при $n_1 \neq n_2$

$$H_{11}(\alpha) = i\frac{n_0 m_1}{\sqrt{n_1}}\left[s_0 s_1 N_3 - s_0(\alpha\varphi_1)N_2 + s_1((\alpha\varphi_1)N_2 - s_1 N_3\right]\xi_2^{-1}(\alpha). \tag{15}$$

Крім того, для функцій $H_{11}(\alpha), H_{12}(\alpha)$ справедливі наступні граничні співвідношення

$$\lim_{\alpha\to 0} H_{11}(\alpha) = Q(1) \quad \lim_{\alpha\to 0} H_{12}(\alpha) = Q(\alpha^{-1}). \tag{16}$$

II. Одинична сила $\delta(y_1)$ $(P \equiv 1)$ діє тангенціально до верхньої точки пружної смуги з початковими напруженнями (рис. 3).

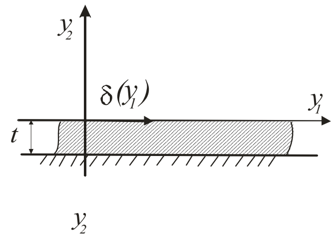

Рис. 3

У цьому випадку переміщення знайдемо за аналогічними формулами:

$$u_{21}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{21}(\alpha)\sin\alpha y_1 d\alpha; \quad -\infty < y_1 < \infty,$$

$$u_{22}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{22}(\alpha)\cos\alpha y_1 d\alpha; \quad -\infty < y_1 < \infty. \tag{17}$$

Тут при $n_1 = n_2$ $H_{21}(\alpha)$ і $H_{22}(\alpha)$ визначаються з виразів

$$H_{21} = m_0\left[-(s+1)(s\,\mathrm{sh}\,\alpha\varphi_1 \cdot \mathrm{ch}\,\alpha\varphi_1 - \alpha\varphi_1) - \mathrm{ch}^2\,\alpha\varphi_1 - s_1\,\mathrm{sh}^2\,\alpha\varphi_1 - s\right]\xi_1^{-1}(\alpha),$$

$$H_{21} = \frac{i m_0 m_1}{\sqrt{n_1}}\left[s s_1\,\mathrm{ch}^2\,\alpha\varphi_1 + (\alpha\varphi_1)^2 - \alpha\varphi_1 N - s_1^2\,\mathrm{ch}^2(\alpha\varphi_1) - s s_1\right]\xi_1^{-1}(\alpha). \tag{18}$$

При $n_1 \neq n_2$

$$H_{21}(\alpha) = m_0\left[s s_1(\alpha\varphi_1)N_2 - sN_3 + s(\alpha\varphi_1)N_2 + N_3\right]\xi_1^{-1}(\alpha),$$

$$H_{21}(\alpha) = \frac{i m_0 m_1}{\sqrt{n_1}}\left[1 - s_1\,\mathrm{ch}(2\alpha\varphi_1) + s s_1 N + s\alpha\varphi_1 N_4 + s s_1(\alpha\varphi_1)^2\,\mathrm{sh}\,\alpha\varphi_1 - s s_1\,\mathrm{ch}^2\,\alpha\varphi_1 - s_2^2(\alpha\varphi_1)N_4 + N_3\right]\xi_2^{-1}(\alpha). \tag{19}$$

Зауважимо, що для функцій $H_{21}(\alpha)$ і $H_{22}(\alpha)$, як й у випадку (16), мають місце асимптотичні розклади:

$$\lim_{\alpha\to 0} H_{21}(\alpha) = Q(1), \ \lim_{\alpha\to\infty} H_{22}(\alpha) = Q(\alpha^{-1}). \tag{20}$$

Отже, зміщення у випадку задачі I (рис. 2) і горизонтальні зміщення в другій задачі (рис. 3) в точці прикладання мають логарифмічну особливість.

Використовуючи принцип суперпозиції, переміщення точок пружної смуги з початковими напруженнями за напрямком осей Oy_1, Oy_2 від одночасно діючих нормальних $p(y_1)$ і тангенціальних $q(y_1)$ напружень, згідно з (18) і (19), визначаються формулами:

$$u_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{11}(|y_1 - \tau|)p(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12}(y_1 - \tau)q(\tau)d\tau,$$

$$u_2\left(y_1\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_{21}\left(y_1-\tau\right)p\left(\tau\right)d\tau+\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_{22}\left(\left|y_1-\tau\right|\right)q\left(\tau\right)d\tau\,, \tag{21}$$

де $u_{ij}\ \left(i,j=1,\,2\right)$ – функція впливу.

Виведення рівнянь розв'язку для пружної смуги з початковими напруженнями

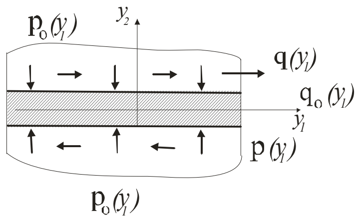

Рис. 4

З умов рівноваги пружної накладки знаходимо, що

$$\tau_{y_1y_1}=\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{x}\left[q\left(x\right)-q_0\left(x\right)\right]dx\ \ \left(-\infty<x<\infty\right). \tag{22}$$

Тут прийнято, що пружна накладка має прямокутний переріз одиночної ширини, а $\tau_{y_1y_1}\left(y_1\right)$ – осьове напруження в напрямку осі Oy_1.

Враховуючи закон Гука, знайдемо

$$\tau_{y_1y_1}=\mathrm{E}_1\varepsilon_{y_1y_1}\left(y_1\right),\ \ \varepsilon_{y\ y_1}=\frac{du_1\left(y_1\right)}{dy_1}. \tag{23}$$

Тут $\varepsilon_{y_1y_1}\left(y_1\right),\ u_1\left(y_1\right)$ відповідно деформація і переміщення в напрямку осі Oy_1.

Будемо припускати, що пружна накладка у вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, тобто

$$D\frac{d^4u_2}{dy_1^{-1}}\,p\left(x\right)-p_0\left(x\right),\ -\infty\le x\le\infty\,, \tag{24}$$

де $u_2\left(y_1\right)$ – вертикальне переміщення точок пружної накладки, D – жорсткість накладки на згин. Тоді, з врахуванням (22) – (24) і (21) для невідомих контактних напружень одержимо систему інтегро-дифференціальних рівнянь

$$D\frac{d^4u_2}{dy_1}\left\{\int\limits_{-\partial}^{\infty}u_{11}\left(\left|y_1-\tau\right|\right)p\left(\tau\right)d\tau+\int\limits_{-\partial}^{\infty}u_{12}\left(y_1-\tau\right)q\left(\tau\right)d\tau\right\}=p\left(y_1\right)-p_0\left(y_1\right),$$
$$\mathrm{E}_1h\frac{d}{dy_1}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_{21}\left(y_1-\tau\right)p\left(\tau\right)d\tau+\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_{22}\left(\left|y_1-\tau\right|\right)q\left(\tau\right)d\tau\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[q\left(\tau\right)-q_0\left(\tau\right)\right]d\tau\,. \tag{25}$$

У випадку дії тільки вертикальних сил $q_0\left(y_1\right)\equiv0$, замість системи (25) будемо мати тільки одне інтегро-дифференціальне рівняння

$$D\frac{d^4}{dy_1}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_{11}\left(\left|y_1-\tau\right|\right)p\left(\tau\right)d\tau\right]=p\left(y_1\right)-p_0\left(y_1\right),\quad \left|x\right|\le\infty\,, \tag{26}$$

а у випадку відсутності вертикальних сил $p_0\left(y_2\right)\equiv0$ накладка лише розтягується, тоді одержимо

$$E_1 \frac{d}{dy_1} \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}\left(\left|y_1 - \tau\right|\right) p\left(\tau\right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[q\left(y_1\right) - q_0\left(y_1\right)\right] dt \ . \quad (27)$$

Список використаних джерел

1. Гузь А.И. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / Гузь А.И. – К. : Наук. думка, 1983. – 296 с.

2. Гузь А.И. Контактные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями, усиленные упругими накладками / А.И. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1985. – 20, № 3. – С. 68 – 78.

3. Гузь А.И. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями / Гузь А.И., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. – К. : Вища школа, 1995. – 305 с.

4. Рудницкий В.Б. Плоская контактная задача для упругого прямоугольного штампа и полуплоскости с начальными напряжениями / В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 10. – С. 69 – 74.

5. Контактное взаимодействие двух плоскостей с начальными напряжениями и упругого штампа // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 2. – С. 55 – 62.

6. Герсеванов И.М. К вопросу о бесконечно длиной балке на упругой почве нагруженной силой. Гидротехническое строительство / И.М. Герсеванов, Я.Л. Магерет. – 1935.

7. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweiss der Verbindungen / Melan E. // Ingenieur Archiv. – 1932. – Bd. 3, Negt 2. – S. 126 – 128.